LANGAGE MATHÉMATIQUE À LA TRANSITION PRIMAIRE / COLLÈGE

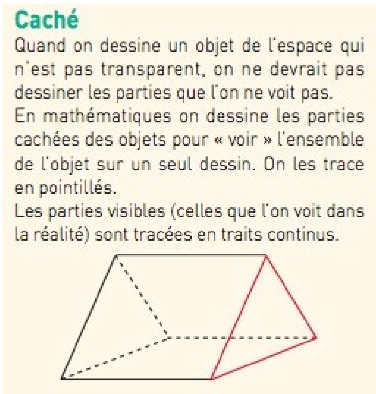
Christophe HACHE
Enseignant chercheur, Université Paris Diderot
IREM de Paris, LDAR
christophe.hache@univ-paris-diderot.fr

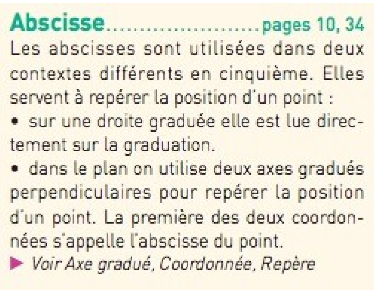
Résumé
Cette communication présente une réflexion en cours sur les pratiques langagières de référence en mathématiques et en classe de mathématiques, au début du collège et à la transition primaire / secondaire.

Plusieurs questionnements sont à la source de ce travail.

I - DOMINO

Un premier questionnement est né alors que j'assumais la coordination de l'édition d'un manuel de mathématiques de collège (Domino, Nathan, classes de 6ème et 5ème, 2004-2006). La confection d'un dictionnaire à part entière au sein du manuel s'est vite révélée être un complément quasi incontournable, à mes yeux, au contenu du manuel. Que ce soit lors des échanges avec les auteurs en cours de rédaction, ou dans le produit final à destination des élèves, le choix, l'usage des mots (mathématiques ou non) s'est révélé être complexe dans le travail d'écriture, même (surtout ?) à ce niveau. D'autant plus si on envisage la lecture non accompagnée d'un élève de 6ème (ou de 5ème), lors de la résolution d'un exercice, ou d'un éventuel travail autonome sur les pages de cours.

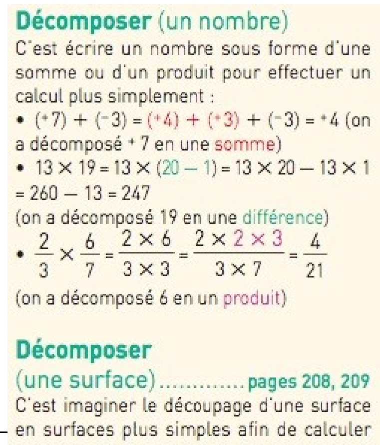

Caché
Quand on dessine un objet de l'espace qui n'est pas transparent, on ne devrait pas dessiner les parties que l'on ne voit pas.
En mathématiques on dessine les parties cachées des objets pour « voir » l'ensemble de l'objet sur un seul dessin. On les trace en pointillés.
Les parties visibles (celles que l'on voit dans la réalité) sont tracées en traits continus.


Abscisse......................**pages 10, 34**
Les abscisses sont utilisées dans deux contextes différents en cinquième. Elles servent à repérer la position d'un point :
- sur une droite graduée elle est lue directement sur la graduation.
- dans le plan on utilise deux axes gradués perpendiculaires pour repérer la position d'un point. La première des deux coordonnées s'appelle l'abscisse du point.

▶ *Voir Axe gradué, Coordonnée, Repère*

Un dictionnaire de 200 à 300 mots a donc été inséré dans le manuel (extraits ci-contre, 266 mots dans le manuel de 6ème, 300 mots dans celui de 5ème), l'objectif était de rappeler les définitions (ou d'indiquer où les trouver dans le manuel), mais aussi de souligner les différentes acceptions d'un mot rencontrées : différences entre sens mathématique et sens courant, mais aussi différents sens en cours de mathématiques.

Faire des mathématiques nécessite entre autres des définitions, un enchainement organisé et rigoureux des propriétés, l'explicitation des raisonnements. Un fonctionnement que l'on associe fortement à l'idée de rigueur. Pourquoi alors a-t-on (avais-je ?) l'impression en écrivant un manuel (mais aussi, par ailleurs, en préparant un cours, ou en faisant cours) de devoir ré-expliquer chaque mot (que ce soit un mot spécifique aux mathématique ou une expression de la langue courante utilisée dans un sens spécifique en cours de mathématiques, qu'ils aient déjà été utilisé ou non, de nombreuses fois ou non) ? Pourquoi cette nécessité ressentie de devoir démêler les différentes acceptions utilisées ? De devoir souligner les ambiguïtés, les pièges possibles au sein même du texte écrit ? Mettre en garde contre les contre-sens possibles ? etc.


Décomposer (un nombre)
C'est écrire un nombre sous forme d'une somme ou d'un produit pour effectuer un calcul plus simplement :
- $(^+7) + (^-3) = (^+4) + (^+3) + (^-3) = {}^+4$ (on a décomposé $^+7$ en une somme)
- $13 \times 19 = 13 \times (20 - 1) = 13 \times 20 - 13 \times 1 = 260 - 13 = 247$ (on a décomposé 19 en une différence)
- $\frac{2}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{2 \times 6}{3 \times 3} = \frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 7} = \frac{4}{21}$ (on a décomposé 6 en un produit)

Décomposer
(une surface)............**pages 208, 209**
C'est imaginer le découpage d'une surface en surfaces plus simples afin de calculer

II - LOGIQUE

Ce travail trouve aussi sa source dans les travaux de logiciens s'intéressant au langage mathématique et au lien, à l'imbrication, entre langue naturelle et formalisme dans le discours mathématique (c'est essentiellement le discours écrit qui est analysé ici). On peut citer notamment l'approche proposée par Daniel Lacombe et par René Cori.

Je prendrais ici des exemples tirés de la thèse de Farasololalao Rakatovoavy (thèse de didactique des mathématiques dirigée par Daniel Lacombe soutenue en 1983). Dans cette thèse l'auteure étudie les difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi dans les textes mathématiques de certains adjectifs marqueurs de variance. « Les syntagmes nominaux auxquels [les marqueurs de variance] s'appliquent servent à nommer les variables ». Les marqueurs étudiés sont principalement les suivants : « quelconque », « arbitraire », « donné », « fixé », « fixe », « choisi », « variable ».

Farasololalao Rakatovoavy montre par exemple que dans les phrases

(1) « Il existe une droite et une seule contenant un point donné et parallèle à une droite donnée »

(2) « Toutes les droites D_1, D_2, D_3... passent par un point fixe »

de nombreuses quantifications sont présentes, explicites pour certaines (« il existe une et une seule », « toutes »), ou plus implicites (« un », « une »). Les deux occurrences du mot « donné » et le mot « fixe » ont un rôle important : dans ces deux phrases il y a interversion[1] de l'ordre de quantification des variables (on peut penser que cet ordre choisi pour énoncer la propriété vise un confort d'énonciation, une certaine lisibilité supposée, ou pour respecter un certain usage). Une traduction dans un langage plus formalisé de la première phrase pourrait en effet être : « $\forall p\in P \ \ \forall d\in D \ \ \exists! d'\in D \ \ (d//d' \wedge p\in d$ »[2]). Le mot « donné » a alors le rôle de signaler et de souligner cette inversion de l'ordre des quantifications. Il en est de même du mot « fixe » dans la seconde phrase (que l'on pourrait formaliser en « $\exists M\in P \ \ \forall i\in\{1,2,3...\} \ \ M\in D_i$ »[3]). Ces marqueurs donnent au lecteur une indication essentielle sur l'ordre des quantifications.

Dans la phrase

(3) « Il existe un point fixe appartenant à toutes les droites D_1, D_2, D_3... »

le mot « fixe » n'a pas de rôle quant à la signification mathématique de la phrase. Il souligne la quantification existentielle, mais il pourrait tout aussi bien ne pas être présent (la phrase « Il existe un point appartenant à toutes les droites D_1, D_2, D_3... » a un sens mathématique, le même que la phrase (3)).

On navigue là entre le contenu mathématiques exposé, le texte et des éléments d'aide à la lecture du contenu mathématique dans le texte lui-même. De nombreux autres exemples peuvent être pris. Un jeu complexe et implicite, de codes d'écriture et de façon de dire les choses est clairement en place. On peut aussi citer les travaux de Viviane Durand Guerrier sur les quantifications implicites dans l'usage de l'implication en mathématique (Durand Guerrier 1999).

Je me permets de reprendre un des points de la conclusion de Farasololalao Rakatovoavy :

« Ce langage utilise un grand nombre de procédés spécifiques, souvent subtils, parfois d'usage délicat, et dont la connaissance et la compréhension ne peuvent absolument pas être pré-supposées (non seulement chez l'enfant, mais même chez l'adulte cultivé mathématicien) ».

On retrouve donc ici comme pour le manuel mais à un autre niveau, le caractère non transparent du langage utilisé en mathématique.

III - LINGUISTIQUE

Un cadrage de l'entrée linguistique et didactique m'a semblé nécessaire pour appréhender ces questionnements de façon plus complète. Je reprends des travaux de linguistes et didacticiens du Français : entre autres Jean Paul Bronckart, Maryse Rebière, Martine Jaubert. Je présente ici les éléments qui me semblent saillants (mon approche est sans doute ici subjective et partielle).

Pour Maryse Rebière (2011, notes personnelles), la langue c'est le matériau, un réservoir intériorisé des signes partagés par une communauté et dont rendent compte les grammairiens. Le langage n'est pas un outil transparent susceptible de traduire directement le monde indépendamment de tout contexte, de tout sujet. Ce n'est pas une façon de coder des idées « déjà là », construite sans le langage lui même. Le langage est vu comme « la mise en activité par un sujet singulier, en contexte, de la langue (réservoir et code) avec une intention ».

Cette description du langage s'appuie sur un positionnement épistémologique, celui de l'interactionnisme social (Vygotski et Voloshinov). Jean Paul Bronckart (2007) énonce ainsi : « Le langage mobilise des signes relevant d'une langue naturelle, (...) variables selon les communautés, ayant la

[1]Par rapport à l'ordre dans un certain langage formel, utilisé classiquement et implicitement.

[2]Où *P* serait l'ensemble des points du plan, *D* l'ensemble des droites du plan. On peut lire cette expression : « Pour tout point *p*, pour toutes droites *d*, il existe une unique droite *d'* telle que *d* soit parallèle à *d'* et *d'* contienne *p* »

[3]Que l'on peut lire par exemple « Il existe un point *M*, tel que, pour tout nombre *i* dans l'ensemble {1,2,3...}, le point *M* appartienne à la droite D_i »

capacité de faire référence à des aspects quelconques du milieu. La thèse majeure de l'interactionnisme est alors que ce sont ces signes mobilisés dans l'activité langagière qui donnent naissance aux représentations humaines, en tant qu'images mentales stabilisées et opératoires. (...) Ces représentations trouvent nécessairement deux lieux d'ancrage : d'un côté elles se stabilisent dans les instances et œuvres d'une communauté, au titre de représentations collectives ; d'un autre côté, elles s'intériorisent dans chaque organisme singulier au titre de représentions individuelles ». On perçoit bien ici le fait que le langage n'est pas vu comme une activité seulement physique, sont mis en avant le lien incontournable entre cette activité et les constructions de représentations, le fait que ces représentations sont toujours considérées comme ayant une dimension personnelle, interne, individuelle, et une dimension sociale, ces deux parts étant intimement articulées. Le langage est outil de construction, de négociation et de transformation des significations.

Martine Jaubert, Maryse Rebière et Jean Paul Bernié (voir par exemple 2003) introduisent la notion de « communauté discursive ». Maryse Rebière (2011affirme que chaque domaine d'activité sociale produit des pratiques qui lui sont propres, relativement stables, génératrices de savoirs qui témoignent de la spécificité de l'activité et des usages acceptables dans ce domaine. Tout groupe constitué sur une pratique sociale repérable, constitue une communauté, notamment discursive. Chaque communauté développe un "contrat de communication" qui lui est propre, qui est la condition du lien social et qui oriente le positionnement énonciatif de chaque interlocuteur. Chacune développe un système de pratiques de tout ordre, dont langagier, qui donne leur pertinence aux pratiques individuelles mises en œuvre et qui permet de juger de leur adéquation à l'activité collective.

On arrive alors au concept de communauté discursive scolaire. Maryse Rebière (2011) dit que si les savoirs sont étroitement liés aux communautés qui les ont élaborés, alors apprendre dans une discipline à l'école, c'est apprendre à agir-penser-parler un peu à la manière des spécialistes (apprendre à se positionner dans un univers caractérisé par des questions digne d'intérêt, des objets, des pratiques spécifiques, dont langagières). Bien sûr l'activité développée au sein de la classe ne saurait être la même que celle développée dans la sphère sociale de référence. On parle de "communauté discursive disciplinaire scolaire".

On peut réinterroger les points précédents de cet exposé avec ce cadre d'interprétation. Mon but serait, dans un premier temps, de mieux comprendre les pratiques langagières de référence des mathématiciens, de cerner la « communauté discursive des mathématiciens », en trouver des caractéristiques. Ceci pour, à terme, alimenter la réflexion autour de la « communauté discursive mathématique scolaire ».

Au delà de la reformulation, je souligne l'épaisseur particulière que prend la notion de langage dans cette approche, tant sur le plan linguistique, que social ou cognitif.

L'« approche logique » ci-dessus se donne pour objectif de décrire la façon dont les mathématiques sont exprimées, d'analyser, entre autres, la nature des relation entre le contenu mathématique énoncé et la langue naturelle. La logique apporte un cadre de référence permettant de rendre compte du contenu mathématique exprimé en langue naturelle, elle permet donc de mettre en évidence la complexité du lien entre ce qui est exprimé en langue naturelle et le contenu mathématique, et, entre autre, de montrer certaines ambiguïtés ou difficultés possibles. Le point de vue est essentiellement mathématique : lorsque, par exemple, une formulation est ambiguë c'est qu'elle a deux sens mathématiques.

L'« approche linguistique »[4] souligne que les caractéristiques langagières étudiées (par exemple de ce point du vue « logique ») ont des enjeux au delà du contenu mathématique exprimé, notamment cognitifs : apprendre à penser des mathématiques n'est pas une activité distincte de celle de se familiariser à certaines pratiques langagières (pratiques personnelles, et pratiques sociales), de même la conceptualisation de nouvelles notions est une activité que l'on ne peut distinguer de l'activité langagière.

[4]Ces deux appellation font simplement référence au titre des deux paragraphes correspondants de ce texte et n'ont surtout pas vocation à perdurer !

IV - TRAITÉS

Un premier objectif est donc pour moi d'analyser les pratiques langagières des mathématiciens. Pour ce faire, les travaux des logiciens cités ci-dessus analysent le lien entre l'expression de mathématiques proposée en langue naturelle et le contenu mathématique exprimé, ce contenu mathématique pouvant être décrit de façon formelle. Il m'a semblé intéressant de préciser ce que pourrait être ce formalisme de référence.

Par formalisme j'entends une mise en forme codifiée permettant de décrire les objets mathématiques, leurs propriétés et les preuves de leurs propriétés, et de contrôler la validité de ce qui est exprimé. La codification permet par ailleurs une manipulation relativement indépendante du sens (règles de transformation, de combinaisons etc.).

Je me suis penché sur les études de certains textes fondateurs des mathématiques ou texte de refondation des mathématiques (ainsi que, quand cela était possible, les textes des auteurs expliquant leurs intentions et leurs choix).

J'exposerai ici brièvement l'approche de trois auteurs : Euclide, Frege et Hilbert.

1 Un formalisme symbolique : l'idéographie de Frege (fin 19ème)

Frege mène une réflexion très explicite d'ordre logique et philosophique sur les mathématiques et la façon de les exprimer. Frege (1882) : « [La langue naturelle] ne satisfait pas à la condition de l'univocité » (unicité du sens de chaque mot), avec des cas « dangereux » où « les significations des mots diffèrent très peu, où les variations sont légères bien que non équivalentes ». Un exemple souligné : le cas où un même mot sert à désigner un concept et un objet particulier tombant sous ce concept (Frege donne l'exemple du mot « cheval » : « le cheval est herbivore » versus « le cheval s'est enfui »)

« La langue n'est pas régie par des lois logiques telles que l'observance de la grammaire puisse suffire à garantir la rigueur formelle du cours de la pensée » (...) « les formes où s'expriment la déduction sont si diverses, si lâches, si mal définies, que des hypothèses peuvent être introduites sans qu'on y prenne garde, et on omet de les compter quand on récapitule les conditions nécessaires à la validité de la conclusion. Celle-ci jouit alors d'une généralité supérieure à celle qui lui revient de droit » (...) « le langage n'offre pas un lot bien délimité de formes de déduction et, à s'en tenir à la forme linguistique, il n'est pas possible de distinguer une séquence sans lacune de celle qui omet des propositions intermédiaires. On peut même dire que le premier cas ne se produit à peu près jamais dans le langage usuel » (...) « presque toujours le langage ne donne pas, sinon allusivement, les rapports logiques ; il les laisse deviner sans les exprimer proprement ».

Ainsi Frege déclare que « pour que (...) quelque chose d'intuitif ne puisse pas s'introduire de façon inaperçue, tout devait dépendre de l'absence de lacunes dans la chaîne de déductions. Tandis que je visais à satisfaire cette exigence le plus rigoureusement, je trouvais un obstacle dans l'inadéquation de la langue ; malgré toutes les lourdeurs provenant de l'expression, plus les relations devinrent complexes, moins elle laissa atteindre l'exactitude que mon but exigeait. De ce besoin résultat l'idée de l'idéographie dont il est question ici » (Préface à l'Idéographie, Frege 1879).

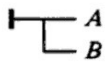
Le formalisme créé, dont on voit ici les premiers éléments (Frege 1879), est donc pour Frege une garantie de l'exactitude des faits énoncés (et démontrés). Il ne crée pas un langage (ça ne se prononce pas par exemple). Il construit un outil formels de référence.

Cet outil devient vite très difficile à manipuler pour penser, exprimer des mathématiques (Frege le constate aussi, tel n'était pas son but, « [mon idéographie] ne restitue pas purement et simplement la pensée – il ne saurait en être autrement pour un moyen d'exposition tout extérieur »).

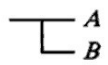
La conditionnalité.

§ 5. Si *A* et *B* signifient des contenus jugeables[1], il y a alors les quatre possibilités suivantes:

1. *A* est affirmé et *B* est affirmé;
2. *A* est affirmé et *B* est nié;
3. *A* est nié et *B* est affirmé;
4. *A* est nié et *B* est nié.



signifie ainsi le jugement selon lequel *la troisième de ces possibilités n'a pas lieu, mais l'une des trois autres a lieu.* Si



est nié, cela veut dire, par conséquent, que la troisième possibilité a lieu, donc que *A* est nié et *B* affirmé.

2 Exemples de formalismes que l'on pourrait qualifier de linguistique (Euclide, Hilbert)

2.1 Euclide (3ème siècle avant JC)

Je reprends là rapidement les travaux de Fabio Acerbi sur l'oeuvre d'Euclide (Acerbi 2012). La langue utilisée par Euclide dans les Éléments a les caractéristiques suivantes :

– Un corpus de mots très faible (les Éléments sont un texte très volumineux[5], ils utilisent pourtant un corpus de seulement 451 mots différents, dont 133 noms définis "sur place" ayant une utilisation spécifique donc). Pas d'homonymie, pas de synonymie.

– La syntaxe des phrases est chargée de sens (rigidification de l'ordre des mots dans une langue qui ne l'exige pas, créations de structures grammaticales ad hoc).

– Un enchainement de phrases dont certaines pré-existent (par exemple un livre entier de « données » reprises dans les Éléments).

L'ensemble donne un langage très rigide, et finalement formel en soi. « La formalisation qui est mise en oeuvre à l'aide du langage dans les données est une formalisation qui satisfait un soucis de validation » (Acerbi 2012), c'est ainsi la nature même du langage qui apporte la preuve (preuves relatives « aux déductions, aux constructions et aux calculs »).

Exemple tirés des « données » de Euclide :

> 1. Des espaces, des lignes, et des angles, auxquels nous pouvons trouver des grandeurs égales, sont dits donnés de grandeur.
>
> 2. Une raison est dite donnée, quand nous pouvons lui en trouver une qui soit la même.
>
> 3. Des figures rectilignes, dont chacun des angles est donné, et dont les raisons de leurs côtés entre eux sont données, sont dites données d'espèce.
>
> 4. Des points, des lignes, et des angles qui conservent toujours la même situation, sont dits donnés de position.

et des « Éléments » :

> PROPOSITION XXVI.
>
> Si les extrémités d'une ligne droite sont données de position, cette droite est donnée de position et de grandeur.
>
> Que les extrémités A, B d'une droite AB soient données de position; je dis que la droite AB est donnée de position et de grandeur.
>
> Car si le point A restant immobile, la droite AB change de position ou de grandeur, le point B se déplacera. Mais il ne se déplace pas; la droite AB est donc donnée de position et de grandeur.

2.2 Hilbert (début du 20ème siècle)

Dans « Les principes fondamentaux de la géométrie », le projet de Hilbert est de refonder la géométrie, de « faire une analyse logique de notre intuition de l'espace ». Hilbert exprime les mathématiques en langue naturelle, sans symbolisme.

Plusieurs procédés sont revendiqués pour garantir le caractère mathématiquement rigoureux du contenu[6], et notamment le fait que l'intuition n'intervient pas dans les démonstrations. En effet, aucune intuition ne doit entrer dans les démonstrations, c'est ce qui garantie le caractère logique du texte, son caractère rigoureux. Il oppose logique et intervention d'une intuition géométrique.

1) il place toute l'intuition géométrique dans les axiomes.

2) Même s'il propose une figure (comme aide à la lecture en quelque sorte), il doit s'assurer que son texte n'y recourt pas. Pour ce faire il propose d'écrire un texte qui est composé de l'énoncé des axiomes, d'une succession organisée[7] des énoncés des axiomes utilisés, ou de l'énoncé des propriétés déjà prouvées (on a

[5]Près de 150 000 mots.

[6]La rigueur ayant là un sens qui est explicité.

[7]Organisée en respectant les règles de déduction.

alors un contrôle sur le fait qu'on a bien une démonstration, sur le fait que l'on utilise que les axiomes, et pas d'intuition, pas de figure).

Le sentiment qu'il a que sa démonstration est purement logique vient du fait qu'il tente d'annuler le rôle de la langue naturelle dans sa démonstration logique. Il a besoin d'une langue comme trace écrite mais s'assure ainsi que cette langue n'intervient pas sur le contenu pour pouvoir déclarer que son travail est effectivement logique. Herreman (2012) parle de « Transparence de la langue naturelle » (on y recourt mais il est essentiel au propos qu'elle n'intervienne pas).

L'utilisation de langue naturelle finit ici aussi par lui faire jouer un rôle formel.

On voit aussi, par exemple, dans le texte ci-contre (Hilbert 1900) que, même si les principes fondateurs du traité garantissent un traitement logique du contenu,

- le texte deviendrait difficilement lisible sans la figure [on parle là du point de vue du lecteur, on change de point de vue, Hilbert a, prioritairement, une visée de refondation, pas de transmission],
- même si effectivement rien n'est vraiment ajouté aux axiomes, la langue naturelle n'a pas un rôle tout à fait transparent (ci-contre en jaune l'explicitation de la structure de la preuve, on a des structures grammaticales complexes, des raccourcis etc. , en vert une allusion à la figure aidant à la lecture et une reformulation lourde d'un axiome).

THÉORÈME X. — (PREMIER THÉORÈME DE CONGRUENCE DES TRIANGLES). — Dans deux triangles ABC, A'B'C', si les congruences

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$$

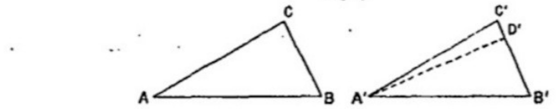
sont vérifiées, les deux triangles sont congruents entre eux.

DÉMONSTRATION. — D'après l'axiome IV, 6, les congruences

$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \quad \text{et} \quad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

sont vérifiées et, par suite, il suffit de démontrer que les côtés BC et B'C' (*fig.* 9) sont congruents entre eux. Supposons, au contraire, que

Fig. 9.



BC ne soit pas congruent à B'C' et déterminons sur B'C' le point D' tel que $BC \equiv B'D'$; les deux triangles ABC, A'B'D' auront deux côtés respectivement congruents et l'angle compris entre ces côtés congruent; en vertu de l'axiome IV, 6, les deux angles $\sphericalangle$ BAC et $\sphericalangle$ B'A'C' seront donc congruents entre eux. Maintenant, d'après l'axiome IV, 5, les deux angles $\sphericalangle$ B'A'C' et $\sphericalangle$ B'A'D' devraient donc aussi être congruents entre eux ; or, ceci est impossible, car, d'après l'axiome IV, 4, un angle ne peut être porté que d'UNE SEULE ET UNIQUE manière à partir d'un point donné d'un côté donné d'une droite donnée dans un plan.

V - PERSPECTIVES

Les études rapides menées ci-dessus méritent d'être complétées pour spécifier les pratiques langagières des mathématiciens. Notamment à partir de textes historiques ou contemporains, mais aussi d'entretiens avec des mathématiciens pour cerner leur rapport au formalisme.

La question abordée serait celle d'étayer ou réfuter les points suivants :

- il existerait un lien constructif et dialectique entre formalisme mathématique et langue « naturelle » dans l'activité mathématique,
- ce lien serait une caractéristique importante (essentielle ?) de la « communauté discursive des mathématiciens ».

Le formalisme, qu'il soit symbolique ou d'ordre plutôt linguistique semble être à la fois nécessaire, garant de rigueur (porteur de la validité de la preuve mathématique), et d'une certaine façon trop contraignant pour l'intuition, la compréhension et le développement des idées et leur communication. Implicites et raccourcis semblent être nécessaires à la rédaction ou à la présentation d'idées, de résultats ou de démonstrations.

On peut penser que le mathématicien parle, pense en langue naturelle. Qu'il a l'intuition qu'il saurait parfaitement formaliser tout ce qu'il dit (quitte à devoir y passer du temps, à y travailler), son langage donne d'ailleurs des gages de cette capacité : il est en partie formalisé (plus la notion exprimée est « sensible », au coeur de son propos, plus il formalise). Pour pouvoir être compris, pour pouvoir penser, il ne peut cependant formaliser tout ce qu'il dit.

On aurait une dialectique entre intuition, pensées et capacité de formaliser l'intuition. La dialectique serait fructueuse, productive, féconde (l'intuition nourrissant le contenu formel, et la formalisation permettant de contrôler l'intuition et d'asseoir la réflexion à venir).

Le langage des mathématiciens est donc en partie formel, mais le formalisme pouvant parfaitement être exprimé en langue naturelle la frontière est floue.

VI - RETOUR À L'ÉCOLE

Ma perspective plus globale est d'entrer dans une étude de la « communauté discursive mathématique scolaire ». De prendre en quelque sorte en compte la question de Maryse Rebière : « Peut-on transposer les savoirs sans réfléchir à la transposition des pratiques langagières qui contribuent à leur construction ? »

Questions :

- Comment ce lien complexe entre langue naturelle et formalisme, entre la description intuitive et l'expression formelle « vit-il » dans le secondaire ? Ce lien entre nécessairement en classe par le biais de l'enseignant qui a été en contact avec la « communauté discursive des mathématiciens » pendant ses études.
- Que ce passe-t-il dans le primaire ? La plupart des enseignants n'ont, par contre, pas été en contact avec la « communauté discursive des mathématiciens », quelle « communauté discursive mathématique scolaire » est installée (la question est d'ailleurs valable dans beaucoup de disciplines) ? Comment ? Quelle transition avec le collège ?

J'avais prévu d'analyser les textes de manuels sur cette base (en comparant les manuels de fin du primaire avec ceux du début du secondaire). Le but était d'essayer de mettre en évidence la communauté discursive scolaire, de la caractériser, au moins en partie. En tout cas d'y chercher les traces de la communauté discursive des mathématiciens caractérisée par le point de vue ci-dessus.

Dix manuels ont été étudiés (il ne s'agit pas des manuels pour les enseignants mais de ceux à destination des élèves) : deux manuels de CM1 (La clef des maths, Euromaths) et un manuel de CM2 (Euromaths), de 4 manuels de 6ème (Domino, Hélice, Sésamath, Transmath) et 3 manuels de 5ème (Domino, Sésamath, Transmath). Le travail a été mené sur le vocabulaire (occurrences des mots, contextes d'utilisation, acceptions etc.). Il n'y a pas pour l'instant de conclusion tranchée.

Quelques observations :

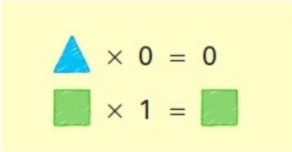
- l'objet manuel tout d'abord est très différent au primaire et au collège : peu de « cours » au primaire, existence d'un manuel du maître conséquent et donc d'un discours dédoublé. On voit par exemple que les « marqueurs » de Rakatovoavy sont utilisés dans le manuel du primaire uniquement dans les petites phrases du manuel de l'élève destinées à l'enseignant (l'exemple porte sur le mot « quelconque », on fait la même constatation avec « donné », « fixe », « particulier » dans son sens opposé à quelconque etc.).

Exemples :

Euromath CM1, 2009

Propriétés

- Le produit d'un nombre quelconque par 0 est toujours égal à 0.
- Le produit d'un nombre quelconque par 1 est égal à lui-même.



⚠ Multiplier un nombre par un autre ne donne pas forcément un nombre plus grand ! Multiplier 8,7 par 0,63 donne 5,481 et 5,481 est plus petit que 8,7.

Helice 6ème, 2009

- les différences d'usage du vocabulaire sont très (essentiellement ?) liées au programme, difficile de trouver des évolutions indépendantes de ce point.

Exemple de vocabulaire apparaissant ainsi en 6ème (inexistant dans les programmes du primaire) : « bissectrice », « médiatrice »

Exemple de vocabulaire dont l'utilisation est croissante : le mot « près » dans « à ... près », ou « au ... près ». L'utilisation est croissante, et les exigences relatives, la technicité de l'emploi de plus en plus forte.

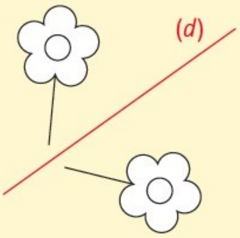
- certains mots ont un usage imprécis et flou, relativement indépendamment du niveau : « hauteur », « base » (mais aussi « point », « droite » etc.). La notion de « hauteur » par exemple (« la hauteur du triangle ») ou celle de « base » ne sont pas ou peu définies, elles peuvent être polysémiques désignant alternativement la « longueur » et le « segment » (et à partir de la 5ème le mot « base » désigne aussi une surface ou une aire pour les calculs de volume).

- Voit-on apparaître un certain formalisme ? On constate l'apparition de mots clefs liés à une certaine formalisation des raisonnements le « si ... alors ... » par exemple, l'usage mathématique d'« appartenir », de « déterminer », l'usage de « respectivement »

Le formalisme apparaît aussi dans la présentation, la posture choisie comme on le voit dans ces deux extraits :

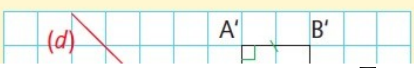
a Figures symétriques

Définition : Deux figures sont **symétriques par rapport à une droite (*d*)** lorsqu'elles se superposent par pliage autour de la droite (*d*).

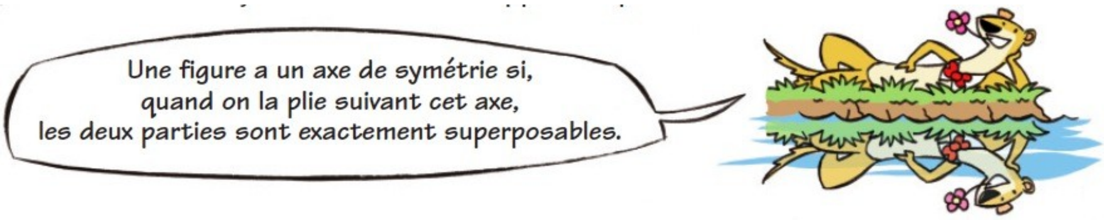


Propriété : La symétrie axiale conserve les longueurs, l'alignement, les angles et les aires.

Exemple Les rectangles ABCD et A'B'C'D sont symétriques par rapport à la droite (d)



Transmath 6ème, 2009



Euromath CM2, 2009

Au delà des évolutions de contenu à enseigner (axe de symétrie d'une figure / figures symétriques) on voit là l'évolution de la présentation, et, surtout, l'apparition d'un certain formalisme (le cours existe en tant que tel, il y a un plan, des « définitions », des « propriétés », des « exemples » etc., même si les preuves ne sont pas présentes, ces intitulés sous entendent et commencent donc à mettre en place un certain formalisme). *Remarque :* le verbe « conserver » (de l'extrait de Transmath ci-dessus) n'est utilisé qu'une fois dans ce sens dans ce manuel de 6ème (de façon générale il est très rarement utilisé dans les manuels, toujours dans le cours, sauf dans un exercice), il n'est pas défini. Quel est son rôle ici ? Permettre l'énoncé d'une propriété ? (elle même caractéristique importante du discours mathématique de référence) ?

On trouve donc quelques évolutions dans les pratiques langagières des différents manuels mais ce travail est à approfondir. L'entrée par les manuels n'est sans doute pas la plus simple.

VII - CONCLUSION

La réflexion menée ici croise donc différents points de vue et analyse différents objets : le travail est à la fois didactique, linguistique, mathématique (logique), il porte à la fois sur le « langage des mathématiciens » et sur le « langage mathématique scolaire ». Il participe, à terme, à étudier la façon dont le langage utilisé en cours de mathématique intervient dans l'apprentissage mathématique.

Une des caractéristiques du langage des mathématiciens, et, donc, de l'activité mathématique même, semble être d'être un lieu de croisement, de mélange entre langue naturelle et formalisme. Le discours n'est que très ponctuellement totalement formel, à l'inverse le discours est très rarement exempt de formalisme. La séparation, la distinction entre ces deux dimensions du langage est très délicate, voire impossible (elle n'est d'ailleurs pas nécessaire). On peut cependant étudier les modalités de leur imbrication. On a vu ici deux approches : l'analyse d'exemples de discours contemporains en mathématiques, l'analyse des choix faits de ce point de vue (explicités ou non par les auteurs) dans des textes de fondements mathématiques.

Il est certain que cette imbrication entre formalisme et langue naturelle dans le langage des mathématiciens n'est pas anodin pour l'apprentissage des mathématiques. La transition entre la fin du primaire et le début du secondaire est un moment intéressant d'observation de ce phénomène. L'activité mathématique scolaire et le discours mathématique scolaire évoluent (que ce soit le discours portant sur les objets, leur nature, sur leurs propriétés ou sur les preuves de leurs propriétés). On a vu ici, dans une première approche, que les textes de manuels donnent quelques indications sur ces évolutions, mais sont un intermédiaire difficile à étudier.

L'étude du lien entre langue naturelle et formalisme dans le discours mathématique (à l'école ou chez les mathématiciens) sera poursuivie et approfondie. D'autre part, il serait intéressant de chercher les traces de ces caractéristiques du langage des mathématiciens dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques par d'autres outils que celui de l'étude des manuels. Pour ces deux questionnements, l'utilisation d'entretiens avec les acteurs (mathématiciens, enseignants, élèves) pourrait permettre d'approfondir l'étude.

VIII - BIBLIOGRAPHIE

ACERBI F. (2012), *Le cas des mathématiques grecques : la voie syntaxique*, conférence du séminaire d'histoire des mathématiques de l'IHP, « La dialectique entre formalisme et langue naturelle en mathématiques », 20 janvier 2012, Paris

BRONCKART JP (2007), L'activité langagière, la pensée et le signe, comme organisateurs du développement humain, *Langage et société*, **121-122**, Paris

DURAND-GUERRIER V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x*, **50**, p. 57-79.

EUCLIDE, traduit par PEYRARD F. (1818), L*es oeuvres d'Euclide en grec, en latin et en Français*, F. Patris, Paris

FREGE (1879), traduit de l'allemand : BESSON C. (1999) « Idéographie », Vrin, Paris

FREGE (1882), Que la science justifie le recours à une idéographie, traduit de l'allemand dans IMBERT C. (1994) *Gottlob Frege, écrits logiques et philosophiques*, pp63-69, Seuil, Paris

GROUPE LOGIQUE, IREM DE PARIS (2012), notamment les documents du cours de CORI R. « Langage mathématique », en ligne http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/sections/logique/

HERREMAN A. (2012), *Naturel ou pas, le langage veut être ignoré. Trois exemples : Frege (1879), Hilbert (1899) et Skolem (1922)*, conférence du séminaire d'histoire des mathématiques de l'IHP, « La dialectique entre formalisme et langue naturelle en mathématiques », 20 janvier 2012, Paris

HILBERT (1900), traduit de l'allemand dans LAUGEL L. (1900) *Les principes fondamentaux de la géométrie*, Gauthier Villard, Paris

JAUBERT M., REBIERE M., BERNIÉ JP (2003) L'hypothèse « communauté discursive » : d'où vient-elle ? où va-t-elle ?, *Les cahiers de Théodile*, **4**, Lille

JAUBERT M., REBIERE M., BERNIÉ JP (2004) Significations et développement : quelles « communautés » ? dans MORODU C. RICKENMANN R. (2004), *Situation éducative et significations,* De Boeck Université, 2004

RAKATOVOAVY F. (1983), *Les difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi dans les textes mathématiques de certains adjectifs marqueurs de variance (exemples principalement empruntés dans des manuels du second degré)*, Thèse Université Paris 7, IREM de Paris, Paris.

REBIÈRE M. (2011), *S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ?*, conférence de la 16ème école d'été de la didactique des mathématiques, Carcassonne [notes personnelles, actes à paraître]

Manuels scolaires :

CHAMPEYRACHE G. (dir.) (2010), *La clef des maths CM1*, Belin, Paris

CHESNÉ JF., LE YAOUANQ MH., COULANGE L., GRAPIN N. (2009), *Hélice 6ème,* Didier, Paris

HACHE C. (dir.) (2005), *Domino 6ème*, Nathan, Paris

HACHE C. (dir.) (2006), *Domino 5ème*, Nathan, Paris

MALAVAL J. (dir.) (2005), *Transmath 6ème*, Nathan, Paris

MALAVAL J. (dir.)(2006), *Transmath 5ème*, Nathan, Paris

PELTIER ML., BRIAND J., NGONO B., VERGNES D. (2009), *Euromath CM1*, Hatier, Paris

PELTIER ML., BRIAND J., NGONO B., VERGNES D. (2009), *Euromath CM2*, Hatier, Paris

SESAMATH, *Sésamath 6ème, Sésamath 5ème,* en ligne : http://manuel.sesamath.net/